CH7 L'ESPACE DES APPLICATIONS LINÉAIRE & MATRICES

7.1 MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

⊙ Soient V et V' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, tq <u>$\dim V = n$</u> et <u>$\dim V' = m$</u>. Soit $B := \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ et $\vec{B}' := \{\vec{b}_1', \dots, \vec{b}_m'\}$ des bases pour V et V'. Considérons l'app. lin. $f : V \to V'$

→ Soient $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base B, ie. $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{b}_i$ ①. On peut les noter $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

→ Similairement, écrivons : $[f(\vec{v})]_{B'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix}$ avec les coordonnées de $f(\vec{v})$ dans B' : $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{m} x_i' \vec{b}_i'$ ②

→ Comme f est une app. lin., on a $f(\vec{v}) = f\left(\sum_1^n x_i \vec{b}_i\right) = \sum_1^n x_i f(\vec{b}_i)$

$= \sum_1^n x_i f(\vec{b}_i) = \sum_1^m x_i' \vec{b}_i'$ ②

→ On peut écrire $f(\vec{b}_i)$ comme un combili d'éléments de $\vec{b}_i'$

$$f(\vec{b}_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} \vec{b}_j' \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ et pour } (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{mi}) \in \mathbb{K}^m$$

Alors $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} \vec{b}_j' = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i\right) \underbrace{\vec{b}_j'}_{\in B'} \overset{②}{=} \sum_{j=1}^{m} x_j' \underbrace{\vec{b}_j'}_{\in B'}$

→ Par unicité des coordonnées, on a $x_j' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i$ où

$x_i = [\vec{v}]_B$ et $\alpha_{ji} = [f(\vec{b}_i)]_{B'}$

→ Les coefficients α_{ji} forme une matrice $m \times n$ qu'on note :

$$[f]_{B',B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

↳ coordonnées de $f(\vec{b}_i)$ en terme de B'

→ On a donc $[f(\vec{v})]_{B'} = [f]_{B',B} [\vec{v}]_B$

Def 7.1 La matrice $[f]_{B',B}$ de l'application linéaire $f : V \to V'$ dans les bases B et B' est le tableau de nombre (α_{ij}) avec $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$ où $n = \dim(V)$ et $m = \dim(V')$ défini par α_{ij} est la i^e composante de la base B' de l'image par f du j^e vecteur de B. Autrement dit, les <u>colonne de la matrice sont les coordonnées des images des vecteurs de la base de V</u>, calculée dans la base de V'.

$ji \to ij$??

7.2 PROPRIETE DES APPLICATIONS LINEAIRE EN TERMES DE LEURS MATRICE

Pro 7.3 • Soient V, V' des E.V. sur $\mathbb{K}$ et $\dim V = n$, $\dim V' = m$. Soient B, B' leurs bases respectives. Alors, l'app. $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V') \to \mathbb{K}^{m\times n}$, $\alpha(f) = [f]_{B';B}$ est un isomorphisme d'E.V.

• En particulier, $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V')) = nm$ et $[\lambda f + \mu g]_{B';B} = \lambda [f]_{B';B} + \mu [g]_{B';B}$ $\forall f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

DEMO On a $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$; $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $B = \{\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}\}$ et $B' = \{\vec{b_1}', \dots, \vec{b_m}'\}$

→ Regardons $(\lambda f + \mu g)(\vec{b_i}) = \lambda f(\vec{b_i}) + \mu g(\vec{b_i}) \overset{*}{=} \lambda \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{b_j}' + \mu \sum_{j=1}^{m} b_{ji} \vec{b_j}'$

$= \sum_{j=1}^{m} (\lambda a_{ji} + \mu b_{ji}) \vec{b_j}'$

(*) par (7.1), on a $[f]_{B';B} = (a_{ij}) \Leftrightarrow f(\vec{b_i}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{b_j}'$

$[g]_{B';B} = (b_{ij}) \Leftrightarrow g(\vec{b_i}) = \sum_{j=1}^{m} b_{ji} \vec{b_j}'$

Alors $[\lambda f + \mu g]_{B'B} = (\lambda a_{ji} + \mu b_{ji})$

→ α bijective? ⊙ injectivité: par construction $[f]_{B'B}$ uniquement déterminé par $f(\vec{b_i})$ ⊙ surjectivité: toute matrice $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ définit une app. lin. tq $f(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{b_i}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \vec{b_j}'$, $\forall \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{b_i} \in V$

?

Pro 7.4 Soient U, V, W des E.V. finidimensionnels de dimension n, m, p. Soient B_U, B_V, B_W ($\#n$, $\#m$, $\#p$) leur base respective. Soient $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Alors $[g \circ f]_{B_W, B_U} = [g]_{B_W, B_V} [f]_{B_V, B_U}$

DEMO Posons $B_U = \{\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}\}$, $B_V = \{\vec{b_1}', \dots, \vec{b_m}'\}$ et $B_W = \{\vec{b_1}'', \dots, \vec{b_p}''\}$

→ Il faut calculer $(g \circ f)(\vec{b_i})$ dans la base B_W:

$(g\circ f)(\vec{b_i}) = \sum_{k=1}^{p} c_{ki} \vec{b_k}''$, $\forall i = 1, \dots, n$

Or, on sait que $(g \circ f)(\underset{B_U}{\vec{b_i}}) = g(f(\vec{b_i})) = g(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} \underset{B_V}{\vec{b_j}'}) \overset{g \text{ linéaire}}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, g(\vec{b_j}')$

$= \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \sum_{k=1}^{p} b_{kj} \vec{b_k}'' = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji} \right) \vec{b_k}''$

Et donc que $c_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji}$ $\forall i = 1, \dots, n$ et $\forall k = 1, \dots, p$

Alors on voit que $[g \circ f]_{B_W, B_U} = [g]_{B_W, B_V} [f]_{B_V, B_U}$

Co 7.5 Soient V, V' des E.V. de dimension n et $B = \{\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}\}$ et $B' = \{\vec{b_1}', \dots, \vec{b_n}'\}$ une base de V et V'. Soit $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$. Alors f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ sa matrice est inversible

JJ Alors, $[f]^{-1}_{B',B} = [f^{-1}]_{B,B'}$

DEMO

② On sait que $[id_V]_{B,B} = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$

③ $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, V') \Rightarrow f \circ f^{-1} = id_{V'}$ et $f^{-1} \circ f = id_V$

Donc $[f^{-1} \circ f]_{B,B} = [id_V]_{B,B} = I_n = [f^{-1}]_{B,B'} [f]_{B',B}$

Alors on trouve que $[f^{-1}]_{B,B'} = [f]^{-1}_{B',B}$

Def. 7.6 Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}_0$. Considérons l'ensemble des matrices carrées inversibles : $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A$ est inversible$\}$

↳ groupe général linéaire

Alors $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la multiplication des matrices qui est appelé le groupe linéaire général en dimension n sur $\mathbb{K}$.

Co 7.7. L'application $\alpha : Hom_{\mathbb{K}}(V, V') \to \mathbb{K}^{m \times n}$; $\alpha(f) = [f]_{B',B}$ induit un isomorphisme de groupe $Aut_{\mathbb{K}}(V) \cong GL_n(\mathbb{K})$ pour un E.V. n-dimensionel V sur $\mathbb{K}$.

Pro 7.8. Soient V et V' des E.V. finidimensionnels sur le corps $\mathbb{K}$ et soit $f : V \to V'$ une app. lin. Soit B base de V et B' base de V'.

$\dim V = n$, $\dim V' = m$

① $\dim(\operatorname{Im} f) = rg([f]_{B,B'})$

② $\dim(\operatorname{Ker} f) = n - rg([f]_{B,B'})$ avec $n = \dim(V)$

- $rg(f)$ est indépendant du choix des bases B, B'

DEMO

① Par def, $rg(f) = \dim \langle \text{colonnes} \rangle = \dim \langle [f(b_1)]_{B'}, \dots, [f(b_n)]_{B'} \rangle$

Or, on sait que $\operatorname{Im} f = \langle [f(b_i)]_{B'} \rangle$ $\forall i = 1, \dots, m$

Alors $\operatorname{Im} f \overset{\text{espace des colonnes}}{\cong} (f)_{B,B'} \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = rg(f)$

② On sait que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = n - rg(f)$

Co 7.9 Soit A une matrice carrée $n \times n$. Les condit° suivantes sont eq. :

① A est inversible

② $rg(A) = n$ (le rang est maximal)

③ Les n lignes de A constituent une base de $\mathbb{K}^{1 \times n}$

④ Les n colonnes de A constituent une base de $\mathbb{K}^{n \times 1}$

DEMO

1) Par 7.3, on sait qu'on peut associer A à $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

De plus, A inversible $\Leftrightarrow f$ isomorphe $\Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{K}^n \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n$

$\Leftrightarrow rg(A) = n$.

7.3 APPLICATIONS LINÉAIRES ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRE

⊙ Soit un système (S) de n équations à m inconnues, i.e.

$K^m \xrightarrow{f} K^n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underset{K^{n\times m}}{A}\,\underset{K^{m\times 1}}{X} = \underset{K^{n\times 1}}{B}$$

et $\vec{a}$ est une solution de $S \Leftrightarrow [f(\vec{a})]_{St.b} = B \Leftrightarrow \vec{a} \in f^{-1}(\vec{b})$

Pro 7.10 Soit un système (S) d'équa. lin.

① L'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de K^m
$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$

② L'ensemble des solutions de (S) est une variété linéaire de K^m qui est : → soit vide $\emptyset$

→ soit de la forme $L = \vec{a} + W$ où $\vec{a} \in K^m$ et W est l'ensemble des solution de $AX = 0$

DEMO ① ($\Leftarrow$) On sait que $\vec{a}$ est solution $\Leftrightarrow \vec{a} \in f^{-1}(\vec{b})$. Ici, $\vec{b} = \vec{0}$. Donc $f^{-1}(\vec{b}) = f^{-1}(\vec{0}) = \operatorname{Ker} f$, qui est bien un sous-espace vectoriel $\subseteq K^m$

($\Rightarrow$) Si l'ensemble des solutions (S) est un S.E.V., $\Rightarrow \vec{0}$ est solution $\Rightarrow f^{-1}(\vec{0}) = \vec{b}$
Comme f est linéaire, $f(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} = \vec{0}$

② par (6.37), on sait que $f^{-1}(b) = \vec{a} + \operatorname{Ker} f$, où $f(\vec{a}) = \vec{b}$. Comme on sait que $\operatorname{Ker} f = W$, on a démontré le point ②.

⊙ Soit $L = \vec{a} + W$ la var. lin. des solutions d'un sys. d'équa. lin.
Alors $\dim L = \dim W$

Pro 7.11 Soit (S) un système d'équation linéaire, avec m variables et n équations. Soit L la variété linéaire des solutions, A la matrice du système, et W l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$. Alors :

① $L \neq \emptyset \Leftrightarrow \dim L = \dim W = \dim \operatorname{Ker} f$

② $\dim L = m - \operatorname{rg}(A)$ (si $L \neq \emptyset$)

③ $m - n \leq \dim L \leq m$ (si $L \neq \emptyset$)

DEMO ① ⇐ (7.10)

② Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\dim L = \dim W = \dim \operatorname{Ker} f \Rightarrow \dim L = \dim V - \dim(\operatorname{Im} f)$
$= m - \operatorname{rg}(A)$

③ Comme $0 \leq \operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim \mathbb{R}^n = n$
$0 \leq m - \dim L \leq n \Leftrightarrow \dim L \leq m \leq n + \dim L$
et ⇔

Co 7.12 **Théorème de l'alternative.** Soit $A=(a_{ij})\in \mathbb{K}^{n\times n}$ et $B=(b_i)\in\mathbb{K}^{n\times 1}$. Considérons le système de n équations à n inconnues $AX=B$, i.e.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

① $AX=0$ possède uniquement la solution triviale $\Leftrightarrow$

"surjectif" ② $AX=B$ possède au moins 1 solution quel que soit $B\in\mathbb{K}^{n\times1}$ $\Leftrightarrow$

"bijectif" ③ $AX=B$ possède exactement 1 solution quel que soit $B\in\mathbb{K}^{n\times1}$ $\Leftrightarrow$

④ La matrice A est inversible

DEMO Soit $V=\mathbb{K}^{n\times1}$ et $f:V\to V$ l'app. lin. associé à A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de V. Alors ① $\Rightarrow \operatorname{Ker} f=\vec{0} \Rightarrow f$ est injective et par (6.2c), f est bijective $\Rightarrow$ ② car ② dit que f est surjective (② $\Rightarrow \operatorname{Im} f=\mathbb{K}^n$) et ③ $\Leftrightarrow$ bijectivité $\Leftrightarrow$ ④

7.4. CHANGEMENT DE BASE ET TRANSFORMATION DES COORDONNÉES

Soit V un E.V. sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Soient $\mathcal{B}=\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$ et $\mathcal{B}'=\{\vec{b}_1',\dots,\vec{b}_n'\}$ deux bases de V. Soit $\vec{v}\in V$ et $(v_1,\dots,v_n)$, $(v_1',\dots,v_n')$ les coordonnées de $\vec{v}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors

$\vec{v}=\sum_{i=1}^n v_i\vec{b}_i=\sum_{i=1}^n v_i'\vec{b}_i'$. De plus, les vecteurs de $\mathcal{B}'$ peuvent être exprimé en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases}\vec{b}_1'=\gamma_{11}\vec{b}_1+\gamma_{21}\vec{b}_2+\dots+\gamma_{n1}\vec{b}_n \\ \vdots \\ \vec{b}_n'=\gamma_{1n}\vec{b}_1+\gamma_{2n}\vec{b}_2+\dots+\gamma_{nn}\vec{b}_n\end{cases} \Leftrightarrow \vec{b}_i'=\sum_{j=1}^n\gamma_{ji}\vec{b}_i$$

- On peut constituer une matrice $C=(\gamma_{ij})$ appelée matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors, on a :

$\vec{v}=\sum_{i=1}^n v_i\vec{b}_i=\sum_{i=1}^n v_i'\vec{b}_i'=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n v_i'\gamma_{ji}\vec{b}_j$. Par l'unicité des coordonnées, on obtient $v_j=\sum_{i=1}^n\gamma_{ji}v_i'$ qui est la formule du changement de base ou encore la formule de transfo. des coordonnées : $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}=C[\vec{v}]_{\mathcal{B}'}$ où la matrice C est la matrice de transfo. des coordonnées de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

- Soit $id_V:V\to V$, alors $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}=[id_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}[\vec{v}]_{\mathcal{B}'}$ où

58 $[id_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=C$

Pro 7.12 Soit V un E.V. de dimension n. Soient B et B' deux bases de V. Soit C la matrice du changement de base qui fait passer de B à B'.
A C est inversible et son inverse C^{-1} est la matrice qui fait passer de B' à B.

DEMO Soit $C = [id_V]_{B,B'}$. Comme id_V est un isomorphisme $^{7.5}$, C est inversible, et $C^{-1} = [id_V]_{B',B}$ et $[id_V]_{B,B'} \cdot [id_V]_{B',B} = I_n$

Pro 7.13 Soient V, W des E.V. de dimension n et m. Soit $f : V \to W$ une app. linéaire. Soient B, B' deux base de V, et E, E' deux bases de W.
Posons C la matrice de changement de base $B \leftarrow B'$ et D la matrice de changement de base $E \leftarrow E'$. Soit A (resp. A') la matrice de f dans les bases B et E (resp. B' et E'). Alors $A' = D^{-1} A C$

$$\begin{tikzcd}
V_B \arrow[r, "f"', "{[f]_{E,B} = A}"] & W_E \arrow[d, "id_W"', "{[id_W]_{E',E} = D^{-1}}"] \\
V_{B'} \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f", "{\underbrace{[f]_{E',B'}}_{= A'}}"'] & W_{E'}
\end{tikzcd}$$

$C = [id_V]_{B,B'}$

$$[id_W \circ f \circ id_V]_{E',B'} = [f]_{E',B'}$$

$$\Leftrightarrow [id_W]_{E',E} [f]_{E,B} [id_V]_{B,B'} = [f]_{E',B'}$$

⊙ Si $V = W$, $B = E$ et $B' = E'$ on a

$$[f]_{B',B'} = [id_V]_{B',B} [f]_{B,B} [id_V]_{B,B'}$$

$$A' = C^{-1} A C$$

$$\begin{tikzcd}
V_B \arrow[r, "f", "{[f]_{B,B}}"'] & V_B \arrow[d, "id_V"] \\
V_{B'} \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"', "{[f]_{B',B'}}"] & V_{B'}
\end{tikzcd}$$

Def 7.15 Deux matrices carrées A et $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sont semblable s'il existe une matrice $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inversible tq $B = C^{-1} A C$
→ La relation "être semblable" est une relation d'équivalence

Pro 7.16 Deux matrices carrées sont semblables $\Leftrightarrow$ elle représente le même opérateur linéaire.

7.5 DUALITÉS

7.5.1 L'espace dual

Def 7.18 Soit V un E.V. sur $\mathbb{K}$. Une app. lin. $f : V \to \mathbb{K}$ est appelée une forme linéaire / fonctionnelle linéaire / covecteur. Par (6.9), $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ (ensemble de toute les formes linéaire) est de nouveau un E.V, appelé espace dual de V : $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$

Le 7.19 Soit V un E.V. sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Alors V^* est aussi un E.V.

$\dim(V) = \dim(V^*) = n$, donc $V \cong V^*$ (⚠ seulement pour $\dim V \neq \infty$)

DEMO Par (7.3), on a $\dim V^* = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})) = \dim V \cdot \dim \mathbb{K} = n \cdot 1 = n$

Alors par (6.27), $\dim V = \dim V^* \Leftrightarrow V \cong V^*$

① Construisons alors un isomorphisme entre V et V^*

- Soit V un E.V et E une base de V. Alors

$\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} = \sum_{\vec{e} \in E \text{ fini}} \lambda_{\vec{e}} \vec{e}$ avec $\lambda_{\vec{e}} \in \mathbb{K}$ sont les coordonnées de $\vec{v}$.

et presque tout les $\lambda_{\vec{e}} = 0$

- $\forall \vec{e} \in E$, on peut définir une forme linéaire tq $e^*(\vec{v}) = \lambda_{\vec{e}}$

Alors, $e^*(\vec{e}') = \begin{cases} 1 & \forall \vec{e}' \in E \text{ et } \vec{e}' = \vec{e} \\ 0 & \forall \vec{e}' \in E \text{ et } \vec{e}' \neq \vec{e} \end{cases}$ $\Leftrightarrow e^*(\vec{e}') = \delta_{\vec{e}, \vec{e}'}$

- $\delta_{\vec{e}, \vec{e}'}$ est le symbole de Kronecker
- e^* dépend de toute la base E, pas seulement de $\vec{e}$
- On peut écrire $\vec{v} = \sum \lambda_{\vec{e}} \vec{e} = \sum_{\vec{e} \in E} e^*(\vec{v}) \vec{e}$

Déf 7.20 ⊙ On appelle $E^* = \{e^* \in V^* \mid \vec{e} \in E\}$ la base duale de la base E

Pro 7.21 • Soit V un E.V. sur $\mathbb{K}$ et E base de V. Alors E^* est une partie libre de V^* et l'app. lin. $\alpha_E : V \to V^*$, $\alpha(\vec{e}) = e^*$ $\forall \vec{e} \in E$ est un monomorphisme

• De plus, si V est finidimensionnel, E^* est une base de V^* et α_E est un isomorphisme.

DEMO Montrons que α_E injectif $\Leftrightarrow \alpha_E(E) = E^*$ partie libre (par 6.17)

Prenons alors $\lambda_1 \vec{e}_1^* + \dots + \lambda_n \vec{e}_n^* = 0_{V^*}$ où $0_{V^*}(\vec{v}) = 0$ $\forall \vec{v} \in V$

Evaluons le combili pour $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in E$: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\vec{e}_i^*(\vec{e}_j)}_{= \delta_{\vec{e}_i, \vec{e}_j}} = \lambda_j = 0$ $\forall j = 1, \dots, n$

Donc E^* est libre $\Rightarrow \alpha_E$ injective

Si $\dim(V) = n$, alors $\overset{(7.19)}{\dim(V) = \dim(V^*)} \overset{(5.25)}{\Rightarrow} E^*$ est une base de V^*

Alors par (6.19), α_E est un isomorphisme

Rem 7.22 Si V est infinidimentionnel, et E une base de V, alors α_E n'est pas surjectif : considérons $f \in V^*$, $f(\vec{e}) = 1$ $\forall \vec{e} \in E$. Alors $f \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$ car un combili est une somme finie.

Donc α_E n'est jamais surj si $\dim(V) = \infty$

⊙ Lien entre l'espace vectoriel dual et les hyperplans :

Soit V un E.V. finidimensionnel tq $\dim(V)=n$, et soit $E=\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ une base de V et $\{1\}$ la base standard de $\mathbb{K}$.

Soit $f\in V^*$ une forme linéaire, $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$

On peut alors écrire $[f]_{\{1\},E} = (a_1,\dots,a_n)$ avec $f(\vec{e}_i) = a_i$

De plus, pour $\vec{v}\in V$, $[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}$

Alors $[f(\vec{v})]_{\{1\}} = [f]_{\{1\},E}\,[\vec{v}]_E = a_1v_1+\dots+a_nv_n$

On trouve que $\vec{v}\in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow [f(\vec{v})]_{\{1\}} = \underbrace{a_1v_1+\dots+a_nv_n = 0}_{\text{Éq. d'un hyperplan}}$

Donc pour $f\neq 0$, Ker f forme un hyperplan de V.

pro 7.23 Il y a une bijection entre les hyperplans d'un E.V. fini-dimensionnel V et les éléments $\neq 0$ de V^* à un multiple scalaire près.

DÉMO On voit que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} \lambda f$, pour $\lambda\in\mathbb{K}_0$

⊙ Lien entre V^* et transposée :

Considérons $\alpha_E : V\to V^*$ et $\vec{a} = (a_1,\dots,a_n)$, et $[\vec{a}]_E = \begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$

Alors on peut définir $\alpha_E(\vec{a})$ comme la matrice ligne donnée par $[\vec{a}]_E^t$:

$$[\alpha_E(\vec{a})]_{E,1} = [\vec{a}]_E^t = (a_1,\dots,a_n)$$

Aussi, on peut écrire : $[\alpha_E(\vec{a})]_{E^*} = [\vec{a}]_E = \begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$

7.5.2 Le dual d'une application linéaire

Soit V, W des E.V., et $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$, $W^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\mathbb{K})$.

On défini $\phi : V\to W$ et $\phi^* : W^*\to V^*$ (⚠ inversé) et $\phi^*(f) = f\circ\phi$ $\forall f\in W^*$

$\phi^*(f) = f\circ\phi$

$$\begin{array}{ccc} \phi^* : W^* & \longrightarrow & V^* \\ \quad\;\; \Psi & & \Psi \\ \quad\;\; f & \longmapsto & \phi^*(f) \end{array}$$

$$W \longrightarrow \mathbb{K} \qquad\qquad \begin{tikzcd} V \arrow[rr] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathbb{K} \\ & W \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Comme ϕ et f sont des app. lin., $f\circ\phi$ est une app lin. (en particul. une forme linéaire). On appelle ϕ^* une application duale de ϕ. Remarquons que f^* va dans la direction opposée de ϕ. On peut alors obtenir une application comme suit :

$(\;)^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*,V^*)$, $\phi \to \phi^*$

On dit alors qu'on "prend le dual".

N.B. : $(-)^*$ est une app. lin.

Le 7.24 Soient U, V, W des E.V. sur $\mathbb{K}$ et $\phi : U \to V$ et $\psi : V \to W$ deux app. linéaires. Alors $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : W^* \to U^*$ et $(id_V)^* = id_{V^*}$

DEMO $\forall f \in W^*$, on a $(\psi \circ \phi)^*(f) = f \circ (\psi \circ \phi) = (f \circ \psi) \circ \phi$

$\overset{\text{associativité}}{=} \phi^*(f \circ \psi) \overset{\text{déf.}}{=} \phi^*(\psi^*(f))$

Aussi, $(id_V)^*(f) = f \circ id_V = f = id_{V^*}(f)$

Pro 7.25 Soient V, W des E.V. et $\phi : V \to W$ une app. linéaire. et $\phi^* : W^* \to V^*$

$V \xrightarrow{\phi} W$

$V^* \xleftarrow{\phi^*} W^*$

① ϕ est un monomorphisme $\Leftrightarrow$ ϕ^* est un épimorphisme

② ϕ est un épimorphisme $\Leftrightarrow$ ϕ^* est un monomorphisme

③ ϕ est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ ϕ^* est un isomorphisme

DEMO ① ($\Rightarrow$) Si ϕ est un monomorphisme, $(6.17) \Rightarrow \exists\, \psi : W \to V$ tq $\psi \circ \phi = id_V$

Alors par (7.24) $(id_V)^* = (\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* = id_{V^*}$. Donc par (6.18), ϕ^* est surjective

($\Leftarrow$) Si ϕ^* est un epimorphisme $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $\operatorname{Ker} \phi = 0_V$

Soit $\vec{v} \in \operatorname{Ker} f$ et E une base de V. Alors $\vec{v} = \sum_{\vec{e} \in E} \lambda_{\vec{e}}\, \vec{e}$. Considérons $E^* = \{e^* \mid \vec{e} \in E\} \subset V^*$. Comme ϕ^* est surj., $\exists\, g_e \in W^*$ $\forall e^* \in E^*$ tq $\phi^*(g_e) = e^*$. Or, $\phi^*(g_e) = g_e \circ \phi$. Donc

$e^*(\vec{v}) = g_e \circ \underbrace{\phi(\vec{v})}_{\in \operatorname{Ker} f} = g_e(0_V) = 0$.

Alors on trouve que $\lambda_{\vec{e}} = 0$ $\forall \lambda_{\vec{e}} \in \mathbb{K}$ donc $\vec{v} = \vec{0}$, donc $\operatorname{Ker} \phi = 0_V$

② ($\Rightarrow$) Si ϕ est un epimorphisme $\overset{6.18}{\Leftrightarrow}$ $\exists \psi : W \to V$ tq $\phi \circ \psi = id_W$

Par (7.24), on a $\psi^* \circ \phi^* = (\phi \circ \psi)^* = (id_W)^* = id_{W^*}$ et donc ϕ^* est un monomorphisme par 6.17

$\phi^* : W^* \to V^*$

$f \longmapsto \phi^*(f) = f \circ \phi$

($\Leftarrow$) Si ϕ^* est injectif. Alors $\operatorname{Im} \phi \subset W$. Soit $E' \subset \operatorname{Im} \phi \subset W$ une base de $\operatorname{Im} \phi$. Alors E' est une partie libre de W.

$\operatorname{Im} \phi \subseteq W$

base $\cup$ $E' \subset E$ $\cup$ base

Soit E une base de W. Montrons que $E = E'$:

Définissons $f : W \to \mathbb{K}$: $\begin{cases} f(\vec{e}) = 0 & \forall \vec{e} \in E' \to \vec{e} \in \operatorname{Im} \phi \\ f(\vec{e}) = 1 & \forall \vec{e} \in E \setminus E' \text{ càd } \vec{e} \notin \operatorname{Im} \phi \end{cases}$

Par construction $f(\mathrm{Im}\,\phi) = 0$.

Calculons alors $\phi^*(f)$: $\forall \vec{v} \in V$, $\phi^*(f)(\vec{v}) = f \circ \phi(\vec{v}) = f(\underbrace{\phi(\vec{v})}_{\in \mathrm{Im}\,\phi})$

Or $f(\vec{e}) = 0$ si $\vec{e} \in \mathrm{Im}\,\phi \Rightarrow f(\phi(\vec{v})) = 0$

Alors on trouve que $\phi^*(f) = 0$ dans V^*

Comme ϕ^* est injectif, $f = 0$ $\forall \vec{v} \in V$

Donc $\nexists\ \vec{e}' \in E \notin \mathrm{Im}\,\phi \Rightarrow E = E' \Rightarrow \mathrm{Im}\,\phi = W$

Prop 7.26 Soient V, W des E.V. finidimentionnels et $\phi : V \to W$ une app. lin. Soient E une base de V et B une base de W. Alors la matrice ϕ^* par rapport aux bases E^* et B^* est exactement la transposée de la matrice ϕ par rapport aux bases E et B.

$$[\phi^*]_{E^*,B^*} = [\phi]^t_{B,E}$$

$$\underset{E}{V} \xrightarrow{\varphi} \underset{B}{W} \qquad \underset{B^*}{W^*} \xrightarrow{\varphi^*} \underset{E^*}{V^*}$$

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ $\quad$ $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ $\quad$ $\{b_1^*, \dots, b_m^*\}$ $\quad$ $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$

$[\varphi]_{B,E} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $\qquad$ $b_i^*(\vec{b}_j) = \delta_{ij}$ $\qquad$ $e_i^*(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$

$\varphi(\vec{e}_i) \overset{③}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{b}_j$ $\qquad$ • Pour $f \in W^*$, $\varphi^*(f) \overset{②}{=} f \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "f"] & & \mathbb{K} \\ & V \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "f \circ \varphi^*"'] & \end{tikzcd}$$

• Considerons la matrice

$[\varphi^*]_{E^*,B^*} = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$

$\varphi^*(b_i^*) \overset{①}{=} \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j^*$

DEMO Calculons $\varphi^*(b_i^*)(\vec{e}_k)$

① $\varphi^*(b_i^*)(\vec{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \underbrace{e_j^*(\vec{e}_k)}_{= \delta_{ij}} = b_{ki}$

② $\varphi^*(b_i)(\vec{e}_k) = b_i^* \circ \varphi(e_k) \overset{③}{=} b_i^*\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} \vec{b}_j\right)$

$\overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \underbrace{b_i^*(\vec{b}_j)}_{= \delta_{ij}} = a_{ik}$

7.5.3 L'espace bidual

Def 7.27 $\forall$ espace vect. V, l'espace dual de l'espace dual de V est appelé espace bidual de V : $V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*, \mathbb{K})$

• $\forall \vec{v} \in V$, on peut définir

$L_V(\vec{v}) : V^* \to \mathbb{K}$, $L_V(\vec{v})(f) = f(\vec{v})$ $\forall f \in V^*$.

$L_V : V \longrightarrow V^{**}$

$\vec{v} \in V \longmapsto L_V(\vec{v}) : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$

$f \longmapsto L_V(\vec{v})(f) = f(\vec{v}) \in \mathbb{K}$

⊙ Regardons la linéarité de $\iota_V(\vec v)$: $\quad f, g \in V^*$

$$\iota_V(\vec v)(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(\vec v) = \lambda f(\vec v) + \mu g(\vec v)$$
$$= \lambda \iota_V(\vec v)(f) + \mu\, \iota_V(\vec v)(g)$$

Donc $\iota_V(\vec v) \in V^{**}$ $\forall \vec v \in V$ ...

⊙ Regardons la linéarité de ι_V :

$$\iota_V(\lambda \vec v + \mu \vec v\,')(f) = f(\lambda \vec v + \mu \vec v\,') = \lambda f(\vec v) + \mu f(\vec v\,')$$
$$= \lambda \iota_V(\vec v)(f) + \mu\, \iota_V(\vec v\,')(f)$$
$$= (\lambda \iota_V(\vec v) + \mu\, \iota_V(\vec v\,'))(f)$$

Donc $\iota_V : V \longrightarrow V^{**}$ est une application linéaire.

Pro 7.28 | L'application $\iota_V : V \to V^{**}$ est un monomorphisme canonique ou naturel. Càd $\forall$ app. lin $\phi : V \to W$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota_V"'] & W \arrow[d, "\iota_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "\phi^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

$$W^* \xrightarrow{\phi^*} V^*$$
$$f \longmapsto f \circ \phi$$

C'est à dire $\phi^{**} \circ \iota_V = \iota_W \circ \phi$

DEMO

① Vérifions que $\forall \vec v \in V$, $\underbrace{\varphi^{**} \circ \iota_V(\vec v)}_{\in W^{**}} = \underbrace{\iota_W \circ \varphi(\vec v)}_{\in W^{**}}$:

$\forall f \in W^*$ $(\varphi^{**} \circ \iota_V(\vec v))(f) = (\iota_W \circ \varphi(\vec v))(f)$

$$= (\iota_V(\vec v) \circ \phi^*)(f) = \iota_V(\vec v)(f \circ \varphi) = f \circ \varphi(\vec v)$$
$$= \iota_W(\phi(\vec v))f = \iota_W \circ \phi(\vec v)(f)$$

Alors ι est naturelle /canonique

② Montrons que ι est un monomorphisme :

Càd si pour $\vec v \in V$, $\iota_V(\vec v) = 0 \Rightarrow \vec v = \vec 0$

$\forall f \in V^*$: $\iota_V(\vec v)(f) = f(\vec v)$ et $\iota_V(\vec v)(f) = 0(f) = 0$

Donc $f(\vec v) = 0$. Alors pour E une base de V, on peut écrire

$\vec v = \sum_{\vec e \in V} \underbrace{e^*(\vec v)}_{=0} \vec e = \sum_{\vec e \in E} 0 \vec e = \vec 0$. Donc ι est injectif

Th. 7.29 | Soit V un E.V. finidimensionnel. Alors V est canoniquement isomorphe à son bidual. $V \cong V^{**}$ $\quad \forall$ base de V et V^{**}

DEMO On sait que $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. Or, ι_V est inj $\Rightarrow$ ι_V est bij.